CONTROL ÁLGEBRA Febrero 2002

1.- a) Halla el rango de la siguiente matriz: (2 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores:
$\vec{u} = (2,-1,3)$; $\vec{v} = (-1,0,2)$; $\vec{w} = (1,-2,12)$ y $\vec{z} = (1,1,9)$

c) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$. Calcula a y b para que su rango sea 1.

2.- Resuelve el siguiente sistema matricial: (1,75 puntos)

$$\mathbf{3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}}$$

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ se pide: (2 puntos)

a) Hallar la matriz $B = 3A \cdot A^t - 2I$ (I es la matriz unidad de orden 2)

b) Hallar la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores de **a:**

$$\left.\begin{aligned} x - 5y - z &= -4 \\ x - y + z &= 6 \\ 3x - 5y + az &= 31 \end{aligned}\right\}$$

(1,75 puntos)

5.- Estudia, según los valores del parámetro **k** la compatibilidad del siguiente sistema. Obtén, si es posible, una solución con **z= k**.

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2w &= 3 \\ 3x - y + z - w &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4w &= k \\ 2x + y + z + w &= 2 \end{aligned}\right\}$$

(2,5 puntos)

SOLUCIONES

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 12\\ 1 & 1 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow{1^a \leftrightarrow 4^a} \begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 12\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} \begin{matrix}2^a+1^a\\ 3^a-1^a \rightarrow\\ 4^a-2.1^a\end{matrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & -3 & -15\end{pmatrix} \begin{matrix}4^a-3^a\\ 3^a+3.2^a \rightarrow\end{matrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 36\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow{3^a+3.4^a} \begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix}$ de donde rango(A)=3

b) Los vectores dados son las filas de la matriz A, como el rango es tres y hay cuatro vectores, son linealmente DEPENDIENTES.

c) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ a & 4 & b\end{pmatrix}$ para que el rango sea 1, las dos filas tienen que ser L.D., es decir una de ellas combinación lineal de la otra, es decir, proporcionales; para que esto ocurra como el elemento central es 4=2.2, tendrá que ser a=1.2=2 y b=0.2=0.

2) Llamamos: $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 5 & 9 & 0\\ 15 & -4 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}$

Así, el sistema queda:

$\left.\begin{matrix}3X-2Y=A\\ 2X+Y=B\end{matrix}\right\}$ y resolviendo, tenemos que $X=\frac{1}{7}(2B+A);\quad Y=\frac{1}{7}(3B-2A)$

Hacemos las cuentas: 2B+A= $\begin{pmatrix}14 & 7 & 0\\ -7 & 21 & 14\\ 35 & -14 & 0\end{pmatrix}$ de donde X= $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$

3B-2A = $\begin{pmatrix}21 & -7 & 14\\ -28 & 0 & 21\\ 0 & -7 & -14\end{pmatrix}$, de donde Y = $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$

3) a) $B=3\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 51\\ 51 & 87\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 51\\ 51 & 85\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de donde , operando, tendremos que:

$\left.\begin{matrix}3x+z=2\\ 3y+w=0\\ 5x+2z=0\\ 5y+2w=1\end{matrix}\right\}$ que son dos sistemas: $\left.\begin{matrix}3x+z=2\\ 5x+2z=0\end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix}3y+w=0\\ 5y+2w=1\end{matrix}\right\}$, cuyas soluciones son:

x= 4; y= -1; z= -10; w= 3, la matriz será entonces $X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -10 & 3\end{pmatrix}$

4) $\left.\begin{array}{r} x-5y-z=-4 \\ x-y+z=6 \\ 3x-5y+az=31 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & a & 31 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a-1^a \rightarrow \\ 3^a-3.1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 10 & a+3 & 43 \end{pmatrix} \frac{1}{2}2^a \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & a+3 & 43 \end{pmatrix} 3^a-5.2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}$$

Para $a=2 \Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE

Para $a \neq 2 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

5)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2w=3 \\ 3x-y+z-w=1 \\ 5x-3y+2z-4w=k \\ 2x+y+z+w=2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & k \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a-3.1^a \\ 3^a-5.1^a \rightarrow \\ 4^a-2.1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & -8 & 2 & -14 & k-15 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2^a \leftrightarrow 4^a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -8 & 2 & -14 & k-15 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3^a-8.2^a \\ 4^a-4.2^a \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & k+17 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} 3^a-2.4^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Para $k=-3$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (3 ecuaciones y cuatro incógnitas)

Para $k \neq -3$ SISTEMA INCOMPATIBLE.

Resolución para $k=-3$, el sistema quedará: $\left.\begin{array}{r} x+y+2w=3 \\ -y+z-3w=-4 \\ -3z+5w=7 \end{array}\right\}$

Haciendo z=t, tendremos que $w=\frac{7+3t}{5}$, operando en las otras dos ecuaciones, nos sale que $x=\frac{2-2t}{5}$; $y=\frac{-4t-1}{5}$

Con lo que si hacemos $z=t=k=-3$, la solución pedida será:

$$\text{solución}: \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{11}{5} \\ z=-3 \\ w=-\frac{2}{5} \end{cases}$$